781. Banach 空間ニ於ケル linear functional ノ集合ニ關スル weak topology ニ就イテ

角谷 靜夫 (阪大)

Banach空間Eデ定義サレタアラユル bounded linear functional $f(x)$ ハ又一ツノ Banach 空間 $\overline{E}$ ヲ作ッテヰル. 任意ノ $f \in \overline{E}$ ニ對シテ f ノ norm $\|f\|$ ハ

$\|f\| = \underset{\|x\| \leqq 1}{l.u.b.} |f(x)|$ ニヨッテ定義セラレ，コノ norm ニヨッテ與ヘラレル topology ハ E ノ strong topology ト呼バレル。コレニ對シテ $\overline{E}$ ニ於テハ又 weak topology ガ考ヘラレル．即チ任意ノ $f_0 \in \overline{E}$ ニ對シテソノ weak neighbourhood $U\left(f_0; \begin{matrix} x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n \\ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots\cdots, \varepsilon_n \end{matrix}\right)$ ハ

$|f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon_i$, $i = 1, 2, \cdots\cdots, n$ ナル如キ $f \in \overline{E}$ 全体ノ集合トシテ定義サレル。但シ $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ ハ E ノ任意ノ点，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots\cdots, \varepsilon_n$ ハ任意ノ real positive number，n ハ任意ノ integer デアル。コノ近傍系ニヨッテ $\overline{E}$ ガ一ツノ Hausdorff 空間トナッテヰルコトハ明カデアリ、又コノ近傍系ニヨッテ $\lim_{n\to\infty} f_n = f_0$ トナルノハ，任意ノ $x \in E$ ニ對シテ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(x)$ (real number ノ系列トシテノ收斂）トナルコトト同等デアル。シカシ weak topology ハ近傍系トシテ第一可附番公理ヲ満足シテヰナイカラ、コノ weak topology ニヨッテ一点 f_0 ガ $\overline{E}$ ノ部分集合 G ノ集積点トナッテヰタトシテモ G ノ中ヨリ f_0 ニ(弱)收斂スル部分列ヲ選ビ出スコトハ必ズシモ可能デハナイ。（例ヘバ J. v. Neumann: Zur Algebra der Funktional operationen und theorie der normalen Operatoren, Math. Ann. 102. 380頁）。コノ事実ノタメ $\overline{E}$ ノ weak topology ハ取扱ヒガ困難デ、色々ト面倒ナコトガ起ッテ

来ル。

例ヘバ，$\overline{E}$ノ線状部分集合 G ガ regularly closed デアルト云フ性質ヲ論ジルタメニハ transfinitely closed ト云フ概念ヲ持ッテ来ナケレバナラナカッタ。（Banach ノ書．Opérations linéaires, P. 116―118）．但シココニ $\overline{E}$ ノ線状部分集合 G ガ regularly closed デアルト云フノハ任意ノ $f_0 \in \overline{E} - G$ ニ対シテ $x_0 \in E$ ガ定マッテ $f_0(x_0) \neq 0$, $f(x_0) = 0$ for $f \in G$ トナルコトデアル。transfinitely closed ノ定義ハ以下ノ議論ニハ必要ガナイノデ省略スル。（詳シクハ Banach ノ本ヲ参照）

Banach ハ $\overline{E}$ ノ線状部分集合 G ニ対シテ regularly closed デアルコトト transfinitely closed デアルコトトガ同等デアルコトヲ証明シテ、コレヲ種々ノ議論ニ用ヒテヰル。以下ニ於テハ $\overline{E}$ ノ線状部分集合 G ニ対シテ regularly closed デアルコトト weakly closed（weak topology ニ於テ closed）デアルコトトガ同等デアルコトヲ証明シヨウ。コレハ非常ニ簡単ナコトデ、当然注意サレルベキコトデアリナガラ未ダコレヲ述ベタモノヲ見タコトガナイ。

シカモコノ考ヲ用ヒルト Banach ノ行ッタ議論ガ大ヘン簡単ニナルヨウデアル。[1]

脚註ハ次頁ヘ―

定理。 E ノ部分線狀集合 G ガ regularly closed デアルタメニ必要且十分ナ條件ハ G ガ $\overline{E}$ ニ於テ weak topology ニテ閉ヂテヰルコトデアル。

證明： 必要ナコトハ明ラカデアルカラ十分ナコトノミ證明スル。$f_0 \in \overline{E} - G$ ニテ且ツ G ガ weak topology ニテ閉ヂテヰルカラ、f_0 ノ weak neighbourhood $U\left(f_0; \begin{matrix} x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n \\ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots\cdots, \varepsilon_n \end{matrix}\right)$ ガ定マツテ $G \cdot U\left(f_0; \begin{matrix} x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n \\ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots\cdots, \varepsilon_n \end{matrix}\right) = 0$ トナル。ヨツテ今任意ノ $f \in \overline{E}$ ニ對シテ n 次元ノ Euclid 空間 R_n 内ノ点 $\{f(x_1), f(x_2), \cdots\cdots, f(x_n)\}$ ヲ對應セシメレバ $f \to \{f(x_1), f(x_2), \cdots\cdots, f(x_n)\}$ ハ $\overline{E} \to R_n$ ナル linear transformation ヲ定メル。且ツコノ T ニヨル G ノ像 $T(G)$ ハ $T(f_0) = \{f_0(x_1), f_0(x_2), \cdots\cdots, f_0(x_n)\}$ ノ $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots\cdots, \varepsilon_n)$-近傍（$R_n$ 内ノ）ニハハイラナイ。$T(G)$ ハ R_n 内ノ線狀部分集合デアルカラ、適當ニ real number $c_1, c_2, \cdots\cdots, c_n$ ヲ定メテ $(\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots, \xi_n) \in T(G)$ ナルトキ

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \xi_i = 0, \quad \text{且ツ} \quad \sum_{i=1}^{n} c_i f_0(x_i) \neq 0$$

ナル如クスルコトガ出來ル。ヨツテ今 $x_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ トオケバ $x_0 \in E$ ニテ

---

(1) C.R. 206, Nr. 23 (1938) ニ於テ N. Bourbaki ガ $\overline{E}$ ニ於ケル weak topology ヲ論ジテ、コノ考ヘヲ用フレバ E ガ regular デアルタメノ條件ガ比較的容易ニ與ヘラレルコトヲ示シテヰル。シカシ Bourbaki ハ上記ノ事實ニハ少シモ觸レテヰナイ。

$f \in G$ ナルトキ $f(x_0)=f\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right)=\sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)=0$,

且ツ $f_0(x_0)=f_0\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right)=\sum_{i=1}^{n} c_i f_0(x_i) \neq 0$ トナル.

此ノ如クシテ x_0 ガ定マッタカラ G ハ regularly closed デアル。 ―以上―